Mathematische Olympiaden

Gerd Baron, TU-Wien

Mathematische Wettbewerbe - Mathematik oder Wettbewerb, Wissenschaft oder Sport?

Art und Ablauf der Wettbewerbe. Welche Vorbereitung wird geboten, welche ist notwendig? Typen und mathematische Teilgebiete der Beispiele. Grundsätzliche Anforderungen an die Beispiele und an die Teilnehmer. Cui bono? Den Teilnehmern und ihrer Ausbildung zu Forschern und normal denkenden Menschen. Der Mathematik. Auch den Normallehrkräften?

Einige kurze geschichtliche Betrachtungen

Mathematische Wettbewerbe sind keine Erfindung unseres Jahrhunderts. In der Renaissance waren sie sehr beliebt. Sie gingen aus den öffentlichen Disputationen, die in Form von Herausforderungen geführt wurden, hervor.

Speziell in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts ([ORE] S 47 f) fand eine Revolution in der Mathematik statt. Die klassischen griechischen mathematischen Arbeiten waren fast zwei Jahrtausende unüberbietbare Spitzen mathematischen Wissens im Abendland. Sie wurden zum Teil in Bearbeitungen von arabischen Übersetzungen studiert. Innerhalb weniger Jahre trat ein Durchbruch ein und neue Teilgebiete mit außerordentlichen Möglichkeiten wurden eröffnet. Dazu gehörte die Theorie der Gleichungen höheren Grades. Nicht nur zeitlich war diese explosionsartige Entwicklung beschränkt, sondern auch örtlich, und zwar auf Norditalien, im speziellen auf Bologna, Mailand und Venedig. Einer, der die weitere Entwicklung vorhersah und mittrug, war Gerolamo CARDANO, geboren 1501. Er war d e r anerkannte Meister der öffentlichen Disputationen vor den Senaten der Universitäten. Z.B. brachte er in Pavia, bei einer für drei Tage anberaumten Disputation, CAMUZIO schon mit seinem ersten Argument zum Schweigen. ([ORE] S 53f) In anderen Gebieten, z.B. in der Medizin, in der Cardano auch Hervorragendes geleistet hat, hatte er viele vergleichbare Rivalen. In der Mathematik war aber nur Niccolo TARTAGLIA (der Stotterer) ihm vergleichbar. ([ORE] S 60 Bild S 64) Und er ist es auch, der uns hier im Zusammenhang mit einem mathematischen

Wettbewerb interessiert. ([ORE] S 61 ff)

In dem damaligen Standardwerk *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita* von Luca PACIOLI (Fra Luca) 1494 in Venedig, bekannt durch die ersten gedruckten Regeln der doppelten Buchhaltung und das erste Auftreten des Wortes Million, gab der Autor im algebraischen Teil die allgemeinen Lösungsmethoden für, wie wir heute sagen, lineare und quadratische Gleichungen an, die im wesentlichen schon seit den Babyloniern bekannt waren. Für die unterschiedlichen Vorzeichenkombinationen wurden dabei verschiedene Regeln angegeben. Pacioli vertrat in seiner Summa die Ansicht, daß keine allgemeinen Methoden zur Lösung von Gleichungen höheren als zweiten Grades gefunden werden könnten. Aber wahrscheinlich irgendwann zwischen 1500 und 1515 entdeckte Scipione DEL FERRO (Professor der Mathematik in Bologna) eine Methode zur Lösung von Gleichungen der Form $x^3+ax=b$. Nach seinem Tode 1526 kamen seine Papiere in den Besitz seines Schwiegersohns und Nachfolgers (bis 1550), Annibale DELLA NAVE. Ebenso war del Ferros Schüler Antonio Maria FIORE aus Venedig in das Geheimnis der Formeln eingeweiht worden. Aber keiner veröffentlichte die Formeln. Eine Vorgangsweise die heutzutage undenkbar ist, da ja gerade durch eine möglichst zeitige Veröffentlichung die Priorität gesichert wird. Aber es gab damals noch kaum gedruckte Bücher. Und noch ein wesentlicher Grund kam dazu. Nämlich die mathematischen Wettbewerbe. Die Anstellungen an den Universitäten waren solche auf Zeit. Die Verlängerung der Anstellung wurde daher oft von den Ergebnissen, die der Bewerber in den mathematischen Wettbewerben erzielte, abhängig gemacht. Außerdem ging es bei diesen Wettbewerben auch um ansehnliche Summen Geldes. Daher waren geheimgehaltene Lösungsmethoden sehr gewinnbringend.

1535 wurde Tartaglia von Fiore zu einem Problemlösungswettbewerb herausgefordert. Es wurde die Zahl der Probleme mit 30 festgesetzt und der Verlierer mußte eine entsprechende Anzahl von Banketten für den Sieger und dessen Freunde bezahlen. Tartaglia bereitete verschiedene Probleme vor. Fiore hatte aber nur einen Pfeil im Köcher, nämlich die kubische Gleichung. Und wirklich kam Tartaglia in Schwierigkeiten. Aber in der (schlaflosen) Nacht vom 12. auf den 13. Februar 1535, kurz vor dem Ende der zur Verfügung stehenden Zeit, hatte er eine Inspiration. Er entdeckte eine Methode und löste alle 30 Probleme in kurzer Zeit. Fiore, schwach in der Theorie, konnte mit den Problemen von Tartaglia nicht viel anfangen und verlor daher klar. ([ORE] S 63-65) Wie die Formeln für die kubische Gleichung dann zu ihrem Namen Cardanosche Formeln kamen, ist eine andere Geschichte.

Die modernen mathematischen Wettbewerbe, die seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts als Herausforderung für Studenten und Schüler veranstaltet werden und deren Prototyp der seit 1894 durchgeführte ungarische Eötvös-Wettbewerb ist sowie die seit den Achtzigerjahren des vorigen Jahrhunderts in Rumänien veranstalteten Schülerwettbewerbe sind, werden alle im wesentlichen in derselben Art durchgeführt. Es handelt sich um schriftliche Klausurarbeiten mit dem Niveau der Teilnehmer angepaßten Schwierigkeitsgraden der Aufgaben. Während der Eötvös-Wettbewerb für Studenten ist, ebenso wie die seit 1938 abgehaltene William Putnam Competition in den USA, werden die nationalen und internationalen mathematischen Olympiaden für Schüler abgehalten. Auf alle derartigen Schülerwettbewerbe in der ganzen Welt können wir hier auch nicht nur annähernd eingehen. Die erste Olympiade in der Sowjetunion wurde 1934 in Leningrad abgehalten. Dann folgten in kurzer Zeit weitere Städte. Seit 1961 sind die Olympiaden in der russischen Föderation zentral organisiert. In Polen fand die erste nationale Olympiade 1949 statt. In Bulgarien 1949/50 und in der ehemaligen DDR 1961 nach zwei Vorolympiaden.

Österrreich startete 1969/70.

An der ersten IMO 1959 in Rumänien nahmen 7 Länder mit 50 Schülern teil. Bei der 1976 in Österreich veranstalteten 18.IMO waren es bereits 18 Länder mit insgesamt 139 Schülern. Da 1980 keine IMO stattfand, wurde 1990 in China die 31.IMO veranstaltet, bei der 54 Nationen aus allen Kontinenten mit 308 Schülern teilnehmen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die jetzigen Mannschaften aus maximal 6 Schülern bestehen, während sie 1976 noch aus 8 Schülern bestanden.

Neben der internationalen Mathematik-Olympiade existieren auch noch etliche regionale Olympiaden. Z.B. die Balkanolympiade seit 1984, Asian Pacific Mathematical Olympiad seit 1989, die Iberoamerikanische Olympiade seit 1986. Seit 1978 wird auch ein Länderkampf, der Österreichisch-Polnische Mathematische Wettbewerb durchgeführt. Dieser ÖPMW weist eine Besonderheit auf, nämlich einen echten Mannschaftswettbewerb und nicht nur eine mehr oder weniger offizielle Mannschaftswertung. Wir werden auf ihn später noch zurückkommen.

Seit 1979/80 wird auch ein Städtekampf durchgeführt, an dem aber keine österreichische Stadt teilnimmt. ([MAC] 2,1(1989) 67-73)

Es sei noch erwähnt, daß in manchen Wettbewerben, wie z.B. in den Ausscheidungsrunden der belgischen Olympiaden Multiple-Choice Tests verwendet werden.

Die Wettbewerbe in Österreich samt Vorbereitung

Art und Ablauf der Wettbewerbe in Österreich ist klassisch. D.h. es sind in Klausurarbeit Aufgaben schriftlich zu lösen. Dabei steigt der Schwierigkeitsgrad und die zur Verfügung stehende Bearbeitungszeit von Runde zu Runde.

Die Teilnehmer an den Österreichischen Mathematischen Olympiaden werden in Vorbereitungskursen für diese Wettbewerbe geschult. Es gibt zwei Arten von Vorbereitungskursen:
Einführungskurse für Schüler der 9. bis 11. Schulstufe, soferne sie noch nicht an einem Landeswettbewerb (siehe unten) teilgenommen haben. In Ausnahmefällen können auch jüngere Schüler zugelassen werden.
Fortsetzungskurse für alle Schüler, die einen Einführungskurs absolviert haben, oder die 11. oder eine höhere Schulstufe besuchen. Diese Kurse können vom selben Schüler mehrmals bis zur Reifeprüfung besucht werden.
An manchen Kursorten werden beide Kursarten gemeinsam in Form eines gemischten Kurses geführt.
Die Kurse finden während des Schuljahres wöchentlich einmal im Ausmaß von zwei Unterrichtsstunden statt.

Den beiden Arten von Vorbereitungskursen entsprechend gibt es auch zwei Arten (zwei Serien) von Wettbewerben, von denen die Wettbewerbe für die Einführungskurse zweistufig, die für die Fortsetzungskurse dreistufig durchgeführt werden.

Die erste Stufe der Wettbewerbe sind die Kurswettbewerbe. Die Durchführung der Wettbewerbe, die Korrektur und Beurteilung der Arbeiten der Schüler, und seit 1981 auch die Stellung der Aufgaben, obliegt dem jeweiligen Kursleiter. Teilnahmeberechtigt sind alle Schüler seines Kurses. Aufgrund der Ergebnisse des Kurswettbewerbs entsendet der Kursleiter höchstens vier Schüler zur zweiten Stufe der Wettbewerbe. Auch die Entscheidung über diese Qualifikation trifft der Kursleiter.

Die zweite (und letzte) Stufe der Wettbewerbe für die Einführungskurse sind die Landeswettbewerbe für Anfänger. In diesen werden die Preisträger der einzelnen Bundesländer ermittelt. Die Entscheidungen über die Preise fällt eine Jury, die sich aus jenen Kursleitern zusammensetzt, die Schüler zum betreffenden Landeswettbewerb entsenden. Diese hat (vorher) die Arbeiten der Schüler zu korrigieren und zu bewerten. Die Entscheidungen der Jury sind Tatsachen-entscheidungen, gegen die kein Rechtsmittel möglich ist. Die Organisation und Durchführung der Landeswettbewerbe obliegt dem Vorsitzenden der Jury, einem ausgewählten Lehrer des entsprechenden Bundeslandes.

Die zweite Stufe der Wettbewerbe der Fortsetzungskurse sind die Gebietswettbewerbe für Fortgeschrittene, die an drei Orten durchgeführt werden und jeweils von zwei bis drei Bundesländern die Teilnehmer, die sich in den Kurswettbewerben qualifiziert haben, umfassen. Für die Organisation und Durchführung sowie für die Jury gilt analog das bei den Landeswettbewerben gesagte. Die jeweils besten Schüler, und zwar insgesamt etwa 30, qualifizieren sich für die Teilnahme am Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, der dritten Stufe der Wettbewerbe für die Fortsetzungskurse.

Zur Qualifikation für die Wettbewerbe der Fortsetzungskurse ist noch folgendes nachzutragen. Schüler, die bereits an einem internationalen Wettbewerb teilgenommen haben, müssen sich ebenfalls wieder der Ausscheidung unterwerfen, nehmen aber, wenn sie sich qualifizieren, keinem Schüler den Platz weg. D.h., daß in diesem Fall das Kontingent der Qualifikanten aufgestockt wird.

Zur Vorbereitung auf den Bundeswettbewerb ist ein zweieinhalbwöchiger Spezialkurs eingerichtet, in dessen Verlauf der Bundeswettbewerb durchgeführt wird. Als Betreuer des Spezialkurses, zu dem die etwa 30 Teilnehmer zusammengezogen werden, fungieren Universitätslehrer und Lehrer an höheren Schulen. In den letzten Jahren sind dies Doz. KIRSCHENHOFER (TU-Wien), die Direktoren THANNHAUSER (Linz) und MÜHLGASSNER (Eisenstadt) sowie die Professoren GMEINER (Spittal/Drau), JANOUS (Innsbruck), KUTHAN (Mödling), Erich und Gerhard WINDISCHBACHER (beide Graz).

Die Aufgaben für alle Bewerbe (ausgenommen Kurswettbewerbe seit 1981) werden zentral gestellt, sind also für alle Landeswettbewerbe, resp. Gebietswettbewerbe gleich. Seit nunmehr 15 Jahren bin ich für die Auswahl und Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich.

Speziell für die Wiener Schüler und Lehrer ist es interessant, daß seit heuer ein Mathematik und Denksportwettbewerb für Schüler der 4. Klassen der AHS stattfindet. Der heurige Wettbewerb ist leider schon vorbei. Er fand vorgestern, am Mittwoch, den 3. April 1990 statt. Hier wurden insgesamt 10 Beispiele mit einer Bearbeitungszeit von zweimal einer Stunde gestellt. Es fanden keine Vorbereitungskurse statt. Zur Information habe ich auch die heuer gestellten Beispiele im Anhang angegeben. Dabei habe ich aus jeder der 8 Gruppen eines der gleichartigen Beispiele ausgewählt.

Vor Überlegungen über den Sollzustand der Vorbereitungen, der ja in natürlicher Weise auch von der Art der, bei den Wettbewerben zu bearbeitenden Beispielen geprägt wird, müssen wir diese Beispiele näher unter die Lupe nehmen. Bis zu einem gewissen Grad kommt hier auch die sportliche Natur der Wettbewerbe ins Spiel. Die Funktion des Trainers wird vom Kursleiter, allgemeiner vom Vorbereiter übernommen. Dies hat nichts mit Reiten zu tun, obwohl er auf einigen Feinheiten der mathematisch exakten Formulierung herumreiten muß. Denn bei vielen mathematischen Sätzen, vor allem wenn sie angewandt werden sollen, ist die im Deutschunterricht so beliebte Nacherzählung oder Inhaltsangabe nicht ausreichend. Ebenso ist eine Einstellung wie „Ich sag's halt so" oder „Es versteht ja eh jeder, was ich mein'" in der Mathematik nicht brauchbar. Selbstverständlich muß der Trainer Methoden und Beispiele aus jenen Gebieten trainieren, die zu den Wettbewerben kommen werden. Schließlich wird ja auch nicht ein Hochspringer in den Marathonlauf gehetzt.

Mathematische Teilgebiete und Typen der Beispiele.

Zum besseren Verständnis der folgenden Ausführungen habe ich die im Vorjahr bei den Wettbewerben zentral gestellten Beispiele im Anhang zusammengestellt. Es sind dies also die Beispiele des Landeswettbewerbs für Anfänger, des Gebiets- und des Bundeswettbewerbs für Fortgeschrittene der ÖMO, des Österreich-Polen Wettbewerbs und der Internationalen Mathematik Olympiade. Da die trainierten und in den österreichischen Bewerben gestellten Probleme sich an jenen der IMO orientieren, sind die mathematischen Teilgebiete in einer aufsteigenden Mengenkette beschreibbar. Beginnend mit Zahlentheorie, Gleichungen, Ungleichungen und Geometrie (ohne konstruktive Abbildungsgeometrie) bei den Anfängern, werden sie um Folgen und Reihen, Gleichungssysteme und Ungleichungssysteme sowie (uneingeschränkter) Geometrie in der Ebene und im Raum für die Fortgeschrittenenkurse erweitert. Bei den Spezialkursen in Raach kommen für den Bundeswettbewerb die bei den internationalen Bewerben üblichen weiteren Gebiete Funktionen, Funktionalgleichungen, Polynome sowie Kombinatorik und kombinatorische Geometrie hinzu. Zur letzteren zählen Abzählungs- und Zerlegungsprobleme, Graphentheorie und Färbungsprobleme. Klarerweise gehörte zu allen angeführten Gebieten noch das Epitheton ornans „elementar" hinzugefügt, was immer es auch bedeuten mag, denn eine exakte Definition dieses Begriffes ist nur in den seltensten Fällen möglich.

Doch nun zu den Typen der Beispiele.

Reine Rechenbeispiele sind äußerst selten. Sie kommen höchstens in den unteren Stufen der Wettbewerbe vor. Im Vodergrund stehen durchaus Beweise und Beispiele, die allgemeine Überlegungen erfordern. Natürlich kommen besonders in der Zahlentheorie Aufgaben vor, die die speziellen Eigenschaften der auftretenden Zahlen ausnützen. Die Lösungsmethoden sind aber meistens allgemeinerer Natur. Wenn auch eine schöne (nicht erschöpfende) Liste von Teilgebieten angegeben werden konnte, so sind viele Beispiele vor allem in den höheren Stufen nicht mehr eindeutig dem einen oder anderen Gebiet zuzuordnen. Schon in der Formulierung und erst recht dann in den Lösungsmethoden gehören sie mehreren Gebieten gleichzeitig an. Gerade das Ineinandergreifen von Ideen aus verschiedenen mathematischen Teilgebieten ist ja ein schöner Zug solcher Aufgaben.

Eine erschöpfende Typologie ist ebenso unmöglich wie eine erschöpfende Liste der Teilgebiete aufzustellen. Einige grundlegende Aspekte für Olympiadebeispiele sollen im nächsten Abschnitt angeführt werden. Sie ergeben hoffentlich ein besseres Verständnis für die in den Beispielsammlungen der ÖMO (BARON–WINDISCHBACHER) [B-G] und [BW1-3] speziell [BW3] und der IMO (HORNSCHUH) [HOR] zu entdeckenden Beispieltypen.

Grundsätzliche Anforderungen an die Beispiele

Was macht eine mathematische Wettbewerbsaufgabe aus? Wie soll sie sein? Ich möchte dazu A. ENGEL zitieren, denn seine Formulierung stimmt mit den gepflogenen Auswahlkriterien gut überein, wenn auch diese nicht immer eingehalten werden.

Als erstes Zitat wähle ich den Beginn des Vorworts seines Buches Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR. ([AE1])

Diese Buch enthält keine einzige Routineaufgabe, die ohne Überlegung auf den Anhieb gelöst werden könnte. Man benötigt in der Regel großen Einfallsreichtum, Einfühlungsvermögen und schöpferische Fähigkeiten. Die notwendigen Vorkenntnisse sind dagegen gering. Die elementare Mathematik der

Mittelstufe reicht immer aus. Einige der Aufgaben sind so „leicht", daß sie im Prinzip von einem Sextaner gelöst werden können. Andere sind so schwierig, daß jeder Mathematiker mit Hochschulbildung stolz sein kann, wenn er sie nach mehrstündiger intensiver Arbeit bezwingen kann (vorausgesetzt, daß er sie nicht kennt).

Was eine gute Olympiadeaufgabe ist, definiert ENGEL in [AE2] und [AE3].

[AE2] **Definition einer guten Olympiade-Aufgabe: Sie ist umso besser je weniger Vorkenntnisse sie erfordert. Ein Schüler sollte gegenüber einem Mathematiker keinen Nachteil haben. ... Ein Mathematiker sollte gegenüber einem Schüler keinen besonderen Vorteil haben.**

[AE3] **Eine IMO-Aufgabe ist gut, wenn Vorkenntnisse fast nichts helfen.**

Meiner Meinung nach müßte man hier auf „spezielle Vorkenntnisse" ausbessern. Denn klarerweise sollen die Schüler Vorkenntnisse, besonders die Methoden betreffend, mitbringen. Sowohl die Lösungsmethoden als auch die Darstellungsmethoden (exakte und sachlich und sprachlich richtige Ausdrucksweise) sind dabei gemeint. Denn **„Die Anforderungen an die Vollständigkeit der Darstellung sind bei Olympiaden sehr hoch"** ([AE1] S.5). Dazu dienen ja auch die Vorbereitungen und die spezielle Ausbildung der Schüler. Darüber läßt sich ENGEL in seinem „Bericht über die XXXI. IMO" [AE3] allerdings etwas widersprüchlich wie folgt aus.

Die Professionalisierung hat weitere Fortschritte gemacht. ... Immer mehr Länder dehnen ihr Training übermäßig aus und stimmen für „schlechte" IMO-Aufgaben, damit sich ihre Investitionen auszahlen.

Und dann schreibt er über einen Schüler, der als einziger seiner Mannschaft volle Punktezahl beim Geometriebeispiel erzielt hat: **Seine kurze und elegante Lösung verwendet projektive Geometrie.**

Die bei der Auswahl der Beispiele für die einzelnen Stufen der Wettbewerbe in Österreich und beim Polenwettbewerb, bei denen ich ja verantwortlich zeichne, berücksichtigten Kriterien, stimmen bis auf den einen unterscheidenden Punkt mit jenen überein, die MARTUS 1864 im Vorwort zur ersten Auflage bezüglich der Reifeprüfungsaufgaben so treffend formuliert hat.

Bei der Auswahl der Aufgaben achtet der Lehrer mit größter Sorgfalt darauf, ob die Aufgabe bei ihrer Behandlung dem Schüler Gelegenheit gibt, von den in den verschiedenen Gebieten erworbenen Kenntnissen Gebrauch zu machen; ferner, ob der Wortlaut der Aufgabe so klar gefaßt ist, daß die Schüler das Geforderte ohne tiefe Überlegung erkennen; besonders aber, ob die Aufgabe

zu ihrer Lösung nicht eines ungewöhnlichen Kunstgriffs bedarf; ob sie vielmehr sich dennoch schön und, wenn irgend möglich, auf mehreren Wegen auflösen lasse; und endlich, ob die vollständige Entwicklung aller vier Aufgaben bei dem von den Schülern zu fordernden Maße von Geläufigkeit im Rechnen und Darstellen in der vorgeschriebenen Arbeitszeit wirklich geliefert werden könne. Kommt hinzu, daß das Ergebnis der Auflösung ein einfaches ist, so daß sich etwa ganze, ja abgerundete Zahlen ergeben, oder daß die Wurzeln aufgehen: so ist die Aufgabe besonders geeignet; weil es dem unter dem Drucke der Prüfung Arbeitenden bei solchem Eintreffen sehr wahrscheinlich wird, daß seine Auflösung richtig sei, und er dadurch die Sicherheit gewinnt, getrost weiterarbeiten zu können.

Der schon angekündigte wesentliche Unterschied liegt natürlich im unterstrichenen Wort „nicht" beim ungewöhnlichen Kunstgriff. Daß die (spärlichen) reinen Rechenergebnisse schön sein sollen, folgt schon daraus, daß bei der IMO kein Taschenrechner oder sonstiges Rechenhilfsmittel verwendet werden darf. Bei der Formulierung der Angaben müssen bei internationalen Bewerben oft sprachliche Besonderheiten in den anderen Wettbewerbssprachen berücksichtigt werden, da ja die Schüler aller Länder die Angaben in ihrer Sprache bekommen, und die Texte aber trotzdem so einheitlich wie möglich gestaltet werden müssen. Ebenso muß manchmal die Notation von der Geheimschrift der österreichischen Mittelschulen abweichen und der international üblichen Notation in der Mathematik angeglichen werden.

Eine weitere Anforderung ergibt sich schon für das Entstehen der Wettbewerbsaufgaben. Selbstverständlich entstehen sehr viele durch Kopieren resp. leichtem Verändern alter Probleme. Dies ist bei der großen Anzahl von regionalen und überregionalen Wettbewerben auf verschiedenen Stufen gar nicht anders möglich. Je höher jedoch das Niveau ist, desto origineller muß das Problem sein. Bei der IMO und beim ÖPMW dürfen (sollten) keine aufgewärmten Probleme vorkommen. An das Prinzip der Novität halte ich mich möglichst auch bei den Problemen für die ÖMO. Die neuen Probleme werden entweder speziell für den Wettbewerb konstruiert, oder sie ergeben sich als Nebenprodukt der Forschung durch Spezialisierung eines noch nicht veröffentlichten Forschungsergebnisses. Einige Angaben werden mir auch von anderen Betreuern zugesandt und von mir direkt oder leicht abgeändert verwendet.

Eine zusätzliche Anforderung tritt bei den Mannschaftswettbewerbsbeispielen im Polenwettbwerb auf. Da diese Beispiele von der ganzen Mannschaft in gemeinschaftlicher Arbeit (ohne Aufsicht) bewältigt werden sollen, müssen sie mehrteilig oder umfangreicher sein, sodaß die Arbeit sinnvoll aufgeteilt werden kann. Es wird auch versucht, „Openend-Beispiele" zu stellen, das sind solche, bei denen z.B. nach einer Schranke gefragt wird, und die umso besser bewertet werden je besser die Schranke ist.

Grundsätzliche Anforderungen an die Teilnehmer

Wer nimmt an den Olympiaden teil? Wer vertritt Österreich bei der IMO?

Glaubt man einer von einer Gruppe von Personen im BMfUK sogar in einer Plakataktion [PLA] vertretenen Auffassung, und zieht man die Ergebnislisten der Wettbewerbe heran (sowohl national als auch international, ja sogar in praktisch allen Staaten der Welt, soweit ihre Ergebnislisten mir zugänglich sind,) so ergibt sich die Feststellung, daß praktisch alle erfolgreichen Wettbewerbsteilnehmer ein Leistungsniveau unter dem Medianwert haben, also bestenfalls in der Gegend: durchschnittlich, mittelmäßig liegen. Zieht man weitere Daten außerhalb der Wettbewerbe heran, so erfährt man, daß selbst oberhalb des Medians negativ bewertete Leistungen auftreten, d.h. praktisch alle Leistungen von Wettbewerbsteilnehmern müssen negativ beurteilt werden. Und diese „Sieger" schicken alle Länder zu internationalen Bewerben. Offensichtlich so ziemlich die Schlechtesten jedes Landes treffen zur IMO zusammen.

Da aber, auch wieder international gesehen, aus den Olympiaden bekannte berühmte sehr gute, ja exzellente Mathematiker hervorgegangen sind, deren Leistungsniveau absolute Spitze darstellt, muß offensichtlich etwas grundfalsch sein. Da es nicht die Ergebnislisten sein können, muß diese Gruppe von Personen (die wir mit unseren Steuergeldern bezahlen) mit ihrer Ansicht vollkommen falsch liegen.

Doch nun genug des traurigen Ernstes. Gehen wir wieder zur Tagesordnung, also zu jenen Gegenständen über, die uns allen Spaß machen. Wäre nicht die Warnung OVIDs „Principiis obsta !" sollte man ja darüber überhaupt kein Wort verlieren.

Aus der trivialen Anforderung an die Teilnehmer: Sie sollen die Aufgaben bewältigen können, im Zusammenspiel mit den bisher aufgeführten Eigenheiten der Aufgaben ergeben sich als grundlegende Anforderungen etwa die folgenden, wie sie von HORNSCHUH in [HOR] zusammengestellt worden sind.

Um an Internationalen Mathematikolympiaden mit realer Aussicht auf

Erfolg teilzunehmen, bedarf es einiger grundsätzlicher Voraussetzungen.

Dazu gehören in erster Linie fundierte mathematische Kenntnisse aus allen relevanten Teilgebieten der Mathematik sowie eine intensive Vorbereitung und eine gezielte Anleitung.

Obwohl der mathematische Inhalt der zu lösenden Aufgaben formal den jeweils geltenden Lehrplänen entspricht, geht er oft ganz erheblich über die in den zugrundeliegenden Lehrbüchern dargestellten Probleme hinaus, ist nicht selten ganz anderer Art.

Weitere notwendige Eigenschaften sind logisches Denken, eine rasche Auffassungsgabe, eine hohe Konzentrationsfähigkeit und vor allem großer Ideenreichtum.

Bei manchen Klausuren bedarf es kreativen Arbeitens und intuitiven Erkennens, um in der vorgegebenen knappen Zeit sämtliche Aufgaben vollständig zu lösen.

Ich möchte hier vor allem noch hinzufügen: Eine präzise und vollständige Darstellung der eigenen Gedanken mit genauem Bezugnehmen auf verwendete Sätze und Methoden (Zitierung geistigen Fremdgutes) sowie Überprüfung des Erfülltseins der Voraussetzungen vor Anwendung von Sätzen und Methoden. Exakte Verwendung von wohldefinierten Begriffen. Eigentlich Anforderungen, die an jeden „mündigen und denkenden Menschen" gestellt werden sollen. Nur merkt man halt in der Mathematik am deutlichsten, daß mit Schlagworten keine Beweise geführt werden können, und daß „Im-Trend-Mitlaufen" keine Lösungsmethode darstellt.

Damit erhalten wir schon den Übergang zum nächsten Fragenkreis, nämlich : Cui bono?

Cui bono?

Da, zumindest meiner Meinung nach, der Nutzen der mathematischen Wettbewerbe äußerst vielfältig ist, kann diese Frage bestenfalls andeutungsweise beantwortet werden.

Daß derartige Wettbewerbe der Mathematik selbst helfen, ist vielleicht nicht allgemein bekannt, aber trotzdem selbstverständlich. Viele Fragenkreise innerhalb der Mathematik sind durch Probleme aus Wettbewerben angeregt und durch ihre Verallgemeinerung gefördert worden. Dies ist schon aus dem im letzten Absatz der Anforderungen an die Beispiele Gesagten zu folgern. Besonders deutlich merkt man es aber in dem bewußt dafür ausgewählten Beispiel TARTAGLIA und die

CARDANOschen Formeln. Wie in der Schulausbildung selbst, sickert auch bei den Wettbewerben das „Wissen" von oben nach unten, von der Forschung zur Schule. Olympiadebeispiele (natürlich keine IMO-Beispiele) können zu Schulbeispielen umfunktioniert werden, besonders aus den Gebieten Ungleichungen, spezielle Funktionen, Extrema ohne Verwendung der Differentialrechnung. Aber es blubbert auch von unten hinauf. Dabei werden schon fast in Vergessenheit geratene Kenntnisse aufgefrischt und aus alten Beispielsammlungen Ideen für neue Beispiele geholt. Speziell in den Wettbewerben der unteren Stufen können so schöne Wettbewerbsbeispiele mit hohen Anforderungen gestellt werden, da die damals geläufigen Lösungsmethoden nicht mehr im Schulstoff sind, und somit die Behandlung dieser Beispiele vom Schüler kreatives Denken erfordert.

Mit dieser Anforderung nützen die Wettbewerbe schon jedem Teilnehmer. Ein weiterer großer Nutzen für den Schüler entsteht dadurch, daß er <u>gefordert</u> wird. Denn dies ist für den guten Schüler, dem eigentlichen Normalschüler einer Höheren Schule, die ihm adäquate Förderung. Für die Schüler brauchen wir <u>Forderkurse</u> und nicht nur <u>Förderkurse</u> derzeitigen Gepräges. In dasselbe Horn, sogar für Grundkurse stößt STEINBERG in [STE], wenn er seine erste These formuliert.

Es gibt einen pädagogischen Circulus vitiosus: Langjährig mathematisch frustrierte Schüler sind in ihrem Verhalten gegenüber der Mathematik gestört und werden deshalb immer weniger gefordert. Sie entwickeln kein Selbstbewußtsein bezüglich des eigenen Könnens, Die Spirale verengt sich...!

These 1: Mehr Mathematik in den Mathematikunterricht von Grundkursen; <u>Fördern</u> gelingt nur durch <u>Fordern</u>.

Die Unterstreichungen sind von mir.

Ein Vorteil dieses Sachverhaltes ist: Für verhaltensgestörte Schüler kann man leichter Förderung, spezielle Betreuung und Geldmittel erhalten als für hochbegabte Schüler.

Bei der Vorbereitung dieses Vortrags, der ja nicht rein mathematischer Natur ist, habe ich mir speziell zur Frage: Cui bono? überlegt, welche Zitate meine Ansichten unterstützen und besser transportieren könnten. Geistiges Stöbern in der mir bekannten Literatur führte mich auf das ungefähr ein Vierteljahrhundert alte Werk „Vom Lösen mathematischer Aufgaben" des Klassikers Georg Polya (13.12.1987-7.9.1985), das ich kurz nach seinem Erscheinen gelesen hatte. Da ich nicht gern eine Arbeit vergebens erledige, werde ich eine erkleckliche Anzahl von Zitaten folgen lassen. Auch solche, in denen

POLYA selbst wieder andere Autoren zitiert. Selbstverständlich sind sie so ausgewählt, daß sie meine Ansichten zum Ausdruck bringen und unterstützen. Sie können als Diskussionsgrundlagen in Lehrerkreisen, aber auch in Kursen verwendet werden.

Zitate zu „*Nutzen für den Teilnehmer*"

[GP1] Seite 19

Jede Aufgabe, die ich löste, wurde zu einer Regel, die später zur Lösung anderer Aufgaben diente. DESCARTES: Oeuvres, Bd. VI, S. 20-21; Discours de la méthode.

[GP1] Seite 19

Wenn ich in der Wissenschaft neue Wahrheiten entdeckt habe, so kann ich sagen, daß ich sie als Folge oder in Abhängigkeit von fünf oder sechs Hauptaufgaben fand, deren Lösung mir gelang, und die ich als ebenso viele Schlachten betrachte, in denen das Kriegsglück auf meiner Seite war. DESCARTES: Oeuvres, Bd. VI, S. 67; Discours de la méthode.

[GP1] Seite 191

Man zerlege jede Aufgabe, die man untersucht, in so viele Teile als es möglich und nötig ist, um die Aufgabe besser zu behandeln. DESCARTES: Oeuvres, Bd. VI, S. 18; Discours de la méthode.

[GP1] Seite 191, als Kommentar

Diese Regel Descartes' ist von geringem Nutzen, so lange die Kunst des Zerlegens ... unerklärt bleibt ... Durch die Zerlegung seiner Aufgabe in ungeeignete Teile könnte der unerfahrenen Aufgabenlöser seine Schwierigkeit erhöhen. LEIBNIZ: Philosophische Schriften, herausgeg. von Gerhardt, Bd. IV.

[GP2] Seite 152, über die „Fernwirkung" des Problemlösens

Was man sich selbst erfinden muß, läßt im Verstand die Bahn zurück, die auch bei anderer Gelegenheit gebraucht werden kann. G.CHR. LICHTENBERG, Aphorismen, Reclam- Universalbibliothek, Nr. 7569/71, Leipzig, 1944, S.145.

[GP2] Seite 170 f

Unser Wissen auf irgendeinem Gebiet besteht aus Kenntnis der Tatsachen und praktischem Können. Praktisches Können ist die Fähigkeit, die erworbenen Kenntnisse anzuwenden; natürlich gibt es kein Können ohne ein gewisses Maß von unabhängigem Denken, Originalität und schöpferische Kraft. In der Mathematik ist Können die Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, Beweise zu finden, Argumente zu prüfen, die mathematische Fachsprache mit einiger Geläufigkeit zu gebrauchen und mathematische Begriffe in konkreten Situationen wiederzuerkennen.

(Bem.: Sachliche und sprachliche Richtigkeit der Ausdrucksweise)

[GPS] Seite 48 - 51 Wie löst man Probleme, speziell Seite 51. Eigentlich zum Verhalten nach der Lösung eines Problems.

Rückschau

Wo soll ich beginnen? Mit der in jeder Einzelheit vollständigen und genauen Lösung.

Was kann ich tun? Betrachte die Lösung von verschiedenen Seiten, und suche Berührungspunkte mit Deinen früher erworbenen Kenntnissen.

Betrachte die Einzelheiten der Lösung und versuche sie so einfach zu machen, wie Du kannst; überblicke ausgedehntere Teile der Lösung und versuche sie kürzer zu fassen; versuche die ganze Lösung auf den ersten Blick zu übersehen. Versuche kürzere oder längere Teile der Lösung zu ihrem Vorteil zu verändern; versuche die ganze Lösung zu verbessern, sie anschaulich zu machen, sie möglichst natürlich in Dein früher erworbenes Wissen einzufügen. Prüfe genau die Methode, die Dich zur Lösung führte, versuche den entscheidenden Punkt darin zu sehen und ihn für andere Aufgaben zu verwenden. Prüfe genau das Resultat und versuche es für andere Aufgaben zu verwenden.

Was kann ich dadurch erreichen? Du kannst eine neue und bessere Lösung finden, Du kannst neue und interessante Tatsachen entdecken. Auf jeden Fall wirst Du, wenn Du es Dir zur Gewohnheit machst, Deine Lösungen auf diese Weise zu überblicken und zu prüfen, ein gutgeordnetes Wissen erwerben und Deine Fähigkeit im Aufgabenlösen entwickeln.

Als weiteres Zitat möchte ich einen Auszug aus dem Vorwort der Aufgabensammlung von MARTUS [MA1] wählen, die mit vollem Untertitel wie folgt heißt.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an preußischen Gymnasien und Realgymnasien gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Ergebnisse (II. Teil) zu einem Übungsbuche vereint von Prof. H.C.E. Martus, Geh. Regierungsrat, bis 1902 Direktor des Sophinen-Realgymnasiums in Berlin.

[MA1] Vorrede zur 1. Auflage Bd.I

Das Buch wird aber auch dazu beitragen, daß der Schüler mehr und mehr Geschmack an mathematischen Betrachtungen findet; es wird seine Kräfte stärken und ihn veranlassen, selbständig weiter zu arbeiten und in höhere Gebiete vorzudringen. So werden fleißige Gymnasialprimaner, wenn sie hin und wieder in den Mußestunden, besonders morgens in den Ferien, Mathematik treiben, gar bald die Fähigkeit sich erwerben ... in die Lehre von den Kurven einzutreten. erfreut über das eigene Schaffen, werden sie auch in anderen neuen Gebieten sich selbst zurecht finden lernen, und oft, nachdem sie sich redlich abgemüht haben, jubelnd ihr „ευρηχα" ausrufen. – Dann ist der Zweck des mathematischen Unterrichts erreicht.

Zitate für *„Nutzen für die Mathematik"*. Hier ist natürlich an die Nutzung der Vorgangsweisen für die allgemeine Mathematik gedacht. Ein anderer Nutzen, nämlich die Anregung zu neuen Forschungsgebieten durch Verallgemeinerung von Wettbewerbsbeispielen wurde schon früher erwähnt. Indirekt helfen die Wettbewerbe auch der Mathematik dadurch, daß die geschulten und versierten Teilnehmer zu guten Mathematikern werden und als solche wesentliche Beiträge zur Entwicklung dieser Wissenschaft leisten.

[GP1] Seite 47

In seinen Regeln zur Anleitung des Geistes beabsichtigte DESCARTES, eine universelle Methode der Problemlösung aufzustellen.

Erstens: Man reduziere jede Art von Problem auf ein mathematisches Problem.

Zweitens: Man reduziere jede Art von mathematischem Problem auf ein algebraisches Problem.

Drittens: Man reduziere jedes algebraische Problem auf die Lösung einer einzigen Gleichung.

(Bem.: Daß dabei die Standardmethode, falls eine solche für ein Problem anwendbar ist, nicht immer auf eine sehr einfache resp. die einfachste Gleichung führt, zeigt das Gleichungssystembeispiel Nr. 3 aus dem Polenwettbewerb, dessen Lösung ich im Anhang angeführt habe, oder auch ein chinesisches Beispiel, das auf eine Gleichung vom Grad 1024 führt. Die zwar damals näherungsweise gelöst wurde, aber Jahrzehnte später durch eine Gleichung vom Grad 10 ersetzt werden konnte.)

[GP1] Seite 174 3. Absatz, eigentlich zum Nutzen von Personen:; Mathematiker, aber auch Schüler und Lehrer.

Das Lösen von Aufgaben ist die spezifische Leistung der Intelligenz, und Intelligenz ist die spezifisch menschliche Gabe. Die Fähigkeit, ein Hindernis zu umgehen, einen indirekten Kurs einzuschlagen, wenn kein direkter Kurs sich bietet, erhebt das kluge Tier über das beschränkte, erhebt den Menschen weit über die klügsten Tiere und den genialen Menschen über seine Mitmenschen.

[GPS] Seite 154 f

Korollar ist ein Lehrsatz, den wir leicht finden, indem wir einen gerade gefundenen Lehrsatz überdenken. Das Wort ist lateinischen Ursprungs; eine wörtliche Übersetzung würde etwa sein "Geschenk" oder "Zugabe".

[GPS] Seite 15

Lemma bedeutet „Hilfssatz". Das Wort ist griechischen Ursprungs; eine wörtliche Übersetzung würde sein „was man annimmt".

[GP2] Seite 63

Wenn wir bei einer Konstruktion oder bei einer Beweisführung etwas annehmen, das noch nicht bewiesen worden ist, sondern erst einer Begründung bedarf, so betrachten wir das Angenommene als an sich zweifelhaft und wert, untersucht zu werden, und nennen es ein Lemma. PROKLUS, Kommentar zu Euklid, Über Proposition 1 von Buch I.

[GP2] Seite 63. Als fraglicher Nutzen für einzelne Beispiele, aber durchaus als praktisch wichtige Methode für zu schwierige Beispiele.

Was ist das Beste, das man für diese Aufgabe tun kann? Sie liegenlassen und eine andere Aufgabe erfinden. DER TRADITIONELLE MATHEMATIKLEHRER.

Zitate zu „***Nutzen für die Normallehrkräfte***"

[GPS] Seite 228

Mnemotechnisches System. Der Verfasser glaubt nicht, daß die Ideen intuitiver Klarheit, strengen Schließens und des logischen Systems für irgend jemand überflüssig sind. Es mag jedoch Fälle geben, in denen das Studium dieser Ideen wegen des Mangels an Zeit oder aus anderen Gründen nicht als unbedingt notwendig betrachtet wird. Doch selbst in solchen Fällen können Beweise wünschenswert sein.

Beweise gewähren Klarheit; dadurch halten sie das logische System zusammen; und so helfen sie, uns an die verschiedenen zusammengehaltenen Einzelheiten zu erinnern.

[GP1] Seite 305 f

Wie im Vorwort erklärt, ist dieses Buch dazu bestimmt, zukünftigen Mittelschullehrern (auch solchen, die bereits im Beruf stehen) *Gelegenheit zu schöpferischer Arbeit auf einem geeigneten Niveau zu geben.* Es ist meines Erachtens grundsätzlich angezeigt, eine solche Gelegenheit zu schaffen: Ein Lehrer, der keinerlei persönliche Erfahrung in schöpferischer Arbeit gehabt hat, kann kaum hoffen, bei seinen Schülern eine schöpferische Tätigkeit anzuregen, zu leiten, zu unterstützen, oder auch nur zu erkennen.

Man kann von dem Durchaschnittslehrer nicht erwarten, daß er auf einem sehr fortgeschrittenen Gebiet schöpferische Arbeit leistet. Andererseits ist die Lösung nichtroutineartiger mathematischer Aufgaben echte schöpferische Arbeit. Die in diesem Buch vorgelegten Aufgaben (die nicht mit einem Kreuz bezeichnet sind) verlangen kaum über das Mittelschulniveau hinausgehende Kenntnisse, aber sie verlangen einen gewissen und zuweilen einen hohen Grad der Konzentration und Einsicht. Die Lösung solcher Aufgaben ist meiner Ansicht nach diejenige Art schöpferischer Arbeit, die in den Lehrgang für Mittelschul-Mathematiklehrer eingeführt werden sollte. In der Tat hat der zukünftige

Lehrer, wenn er solche Aufgaben löst, Gelegenheit, sich eine *gründliche Kenntnis der Mittelschulmathematik* anzueignen - eine echte Kenntnis, die gebrauchsfertig ist, die er nicht durch bloßes Auswendiglernen sondern durch Anwendung auf interessante Aufgaben erworben hat. Und dann wird er, was noch wichtiger ist ein gewisses *praktisches Können* entwickeln, eine gewisse Geschicklichkeit in der Behandlung der Mittelschulmathematik, eine gewisse Einsicht in das Wesen des Aufgabenlösens. Dies alles setzt ihn in den Stand, die Arbeit seiner Schüler besser zu leiten und zu beurteilen.

Dazu paßt auch das weiter oben zitierte LICHTENBERG Zitat. Leider ist aber die übliche Einstellung selbst bei üblichen Lehrbuchbeispielen jene des TRADITONELLEN MATHEMATIKLEHRERS von der vorigen Seite Seite

[GP2] Seite 153 ff 14.2 Das Ziel des Lehrens

Es handelt sich hier um die Mathematik in dem Pensum der Mittelschulen, und ich habe eine altmodische Ansicht über ihr Ziel: An allererster Stelle soll sie den jungen Menschen das DENKEN beibringen.

Erstens: Das Denken, um das es sich hier handelt, ist nicht „In-den-Tag-Hineinträumen", sondern „zielgerichtetes Denken" oder „absichtsvolles Denken" (William James) oder „produktives Denken" (Max Wertheimer). Solches „Denken" läßt sich hier, wenigstens in erster Annäherung, mit dem „Lösen von Aufgaben" identifizieren. Jedenfalls ist es meiner Meinung nach eine der Hauptaufgaben des Mathematikunterrichts auf der Mittelschule, in den Schülern die Fähigkeit zu entwickeln, Aufgaben zu lösen.

[GP2] Seite 170 f. Fortsetzung des weiter oben begonnenen Zitats.

... Es wird allgemein zugegeben, daß in der Mathmatik Können wichtiger ist als der bloße Besitz von Kenntnissen. Es wird allgemein gefordert, daß die Mittelschule ihren Schülern nicht nur sachliche Kenntnisse, sondern auch praktisches Können vermitteln und sie zu geistiger Selbständigkleit, Originalität und schöpferischer Leistung anregen soll. Aber fast nie werden diese schönen Dinge von dem Matrhematiklehrer selbst verlangt - ist das nicht bemerkenswert? ... Hat aber der Lehrer in keiner Art schöpferischer Arbeit Erfahrung, wie kann er dann bei seinen Schülern schöpferische Tätigkeit anregen, leiten, fördern oder auch nur erkennen? Ein Lehrer, der seine mathematischen Kenntnisse auf rein rezeptive Weise erlangt hat, kann bei seinen Schülern schwerlich aktives Lernen entwickeln. ein Lehrer, der in seinem ganzen Leben nie eine eigene gute Idee hat, wird wahrscheinlich einen Schüler, der eine solche Idee hat, tadeln anstatt ihn zu ermutigen.

... Ich habe ein *Seminar im Aufgabenlösen* für Lehrer eingerichtet und wiederholt geleitet.

Dieser Satz bestärkt die Kompetenz POLYAs und stellt vielleicht sogar ein Projekt für die Zukunft der Olympiaden (hier gibt es schon Vorbereitungskurse für die Leiter der Vorbereitungskurse) und der Lehrerausbildung dar. Vielleicht wird schon im nächsten Jahr ein solcher Kurs für alle Lehrer zugänglich abgehalten. Daher möchte ich mit diesem Satz schließen.

21. Österreichische Mathematische Olympiade 1990

Landeswettbewerb für Anfänger 12. Juni 1990.

1) Man zeige: Gilt für ganze Zahlen x,y und z $x+y^2=19^z$, so gilt : 90 teilt nicht x^2+y.

2) Man löse die Gleichung $\left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right] = x$ über $\mathbb{R}$.

3) Man zeige: Sind x,y,z ganze Zahlen und mindestens eine davon ist gleich 1990, so gilt $x^2+y^4+z^6>xy^2+y^2z^3+xz^3$.

4) An einer senkrechten Wand ist eine vertikale Strecke AB (Höhe von A über dem Fußboden (A') ist 2a, B liegt um 2b höher) markiert.
Man zeige: Ein Beobachter mit Augenhöhe a sieht genau dann AB unter maximalem Winkel, wenn er die verlängerte Strecke BA' unter rechtem Winkel sieht.

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 3. Mai 1990.

1) Man zeige: Es gibt keine natürliche Zahl n, für die die Anzahl der ganzen Zahlen a mit a teilt n gleich 1990 ist, und die Summe der Reziprokwerte 1/b der natürlichen Zahlen b mit b teilt n gleich 2 ist.

2) Man löse die Gleichung über $\mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{2x-7} + \sqrt[3]{3x-3} = \sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{4x-2}$$

3) Sei ABC ein Dreieck. E der Fußpunkt der Höhe auf b und D der Fußpunkt der Höhe auf a und M jener Punkt auf AD mit AD=DM.
a) Man zeige: Es gibt kein spitzwinkeliges Dreieck ABC, für das die Punkte C,D,E,M auf einem Kreis liegen.
b) Man bestimme alle Dreiecke ABC, für die C,D,E,M auf einem Kreis liegen.

4) Man berechne für alle natürlichen Zahlen $k,n \geq 2$

$$\left[\frac{2^{n+1}+1}{2^{n-1}+1}\right] + \left[\frac{3^{n+1}+1}{3^{n-1}+1}\right] + \dots + \left[\frac{k^{n+1}+1}{k^{n-1}+1}\right]$$

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene 1. Tag 30. Mai 1990.

1) Für wie viele natürliche Zahlen $n \leq N = 1990^{1990}$ gilt, daß n^2-1 zu N relativ prim (teilerfremd) ist.

2) Man zeige: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4 \dots \sqrt[n]{n}}}} < 2$$

3) In einem konvexen Viereck ABCD (Innenwinkel < 180^0) sei E der Diagonalenschnittpunkt. F_1, F_2 und F seien die Flächeninhalte von ABE, CDE und ABCD. Man zeige: $\sqrt{F_1}+\sqrt{F_2} \leq \sqrt{F}$. Wann gilt Gleichheit?

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene 2. Tag 31. Mai 1990.

4) Man bestimme für jede <u>ganze</u> Zahl $m \neq 0$ alle Funktionen $f:\mathbb{R}\setminus\{+3;0\} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x+3) + f\left(\frac{-9}{x}\right) = \frac{(1-m)(x^2+3x-9)}{9m(x+3)} + \frac{2}{m} \quad \text{für alle } x \neq -3.$$

Weiters bestimme man zu vorgegebener <u>natürlicher</u> Zahl m alle <u>ganzen</u> Zahlen x, für die f(x) eine ganze Zahl ist.

5) Man bestimme alle rationalen Zahlen r, sodaß alle Lösungen von $rx^2+(r+1)x+(r-1)=0$ ganze Zahlen sind.

6) Das konvexe Fünfeck ABCDE sei einem Kreis eingeschrieben. Die Normalabstände von A zu den Trägergeraden von BC, CD und DE seien a,b bzw. c. Man bestimme in Abhängigkeit von a,b und c den Normalabstand von A zur Diagonale BE.

13. Österreichisch-Polnischer Mathematischer Wettbewerb

Einzelwettbewerb 1. Tag 27. Juni 1990

1) In der Ebene seien 8 verschiedene Punkte $A, B, P_1, \ldots, P_6$ gegeben, wobei $P_1, \ldots, P_6$ auf derselben Seite bezüglich der Geraden AB liegen. Man zeige: Wenn die Dreiecke ΔABP_i $(1 \le i \le 6)$ zu einander ähnlich sind, dann liegen die 6 Punkte $P_1, \ldots, P_6$ auf einem Kreis.

2) Man bestimme alle Tripel (x,y,z) positiver ganzer Zahlen x,y,z, sodaß

$$x^{y^z} y^{z^x} z^{x^y} = 1990^{1990} xyz.$$

3) Man zeige: Es gibt genau zwei Tripel (x,y,z) reeller Zahlen x,y,z, die das Gleichungssystem

$$x+y^2+z^4=0$$
$$y+z^2+x^4=0$$
$$z+x^2+y^4=0$$

erfüllen.

Einzelwettbewerb 2. Tag 28. Juni 1990

4) Für ein festes $n>1$ sei das folgende Gleichungssystem gegeben.

$$x_1^4+14x_1x_2+1=y_1^4$$
$$x_2^4+14x_2x_3+1=y_2^4$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_{n-1}^4+14x_{n-1}x_n+1=y_{n-1}^4$$
$$x_n^4+14x_nx_1+1=y_n^4$$

Man bestimme alle Lösungen $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \rangle$, in denen alle x_i $(1 \le i \le n)$ und alle y_i $(1 \le i \le n)$ natürliche Zahlen (>0) sind.

5) Für jedes $n>1$ sei S_n die Menge aller Permutationen (bijektiven Abbildungen) $p:\{1,2,\dots,n\}\mapsto\{1,2,\dots,n\}$.

Für jedes $p\in S_n$ bezeichne $F(p)=\sum_{k=1}^{n}|k-p(k)|$.

Man berechne $M_n=\frac{1}{n!}\sum_{p\in S_n}F(p)$.

(D.h, es wird über alle Permutationen $p\in S_n$ summiert.)

6) Sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten.
Angenommen, die ganzen Zahlen $x_1,x_2,\dots,x_n$ $(n\geq 3)$ erfüllen die folgenden Bedingungen:
$P(x_i)=x_{i+1}$ für $1\leq i\leq n-1$ und $P(x_n)=x_1$.
Man zeige: $x_1=x_3$.

Mannschaftswettbewerb 29. Juni 1990

7) Gegeben ist ein Satz von Dominosteinen
[0|0],[0|1],...,[0|n],[1|1],[1|2],... ...,[n|n] (d.h. für jedes Paar a,b mit $0\leq a\leq b\leq n$ ein Stein). Eine Kette ist eine Serie von passend aneinander gelegten Steinen mit der Gestalt $[a_1|a_2][a_2|a_3]\dots[a_{k-2}|a_{k-1}][a_{k-1}|a_k]$ (z,B, [0|5][5|5][5|1][1|2]). Eine Kette heißt geschlossen, wenn $a_k=a_1$ gilt.
a) Man zeige: Ist n gerade, so existiert eine geschlossene Kette, die alle Steine enthält.
b) Man zeige: Ist n ungerade, so bleiben bei jeder geschlossenen Kette mindestens $(n+1)/2$ Steine übrig.
c) Sei n ungerade. Wie viele Mengen A von $(n+1)/2$ Steinen gibt es derart, daß die Steine aus $S_n\backslash A$ zu einer geschlossenen Kette aneinander gelegt werden können?

8) Sei R ein 28x48 Rechteck. Wir betrachten Zerlegungen von R in kongruente axb Rechtecke ($a\neq b$; $a,b\in\mathbb{N}$) mit den Seiten parallel zu den Seiten von R. Für manche (a,b) gibt es mehrere verschiedene Zerlegungen, für manche nur eine Zerlegung.
a) Man bestimme das flächenmäßig kleinste axb Rechteck, sodaß es nur eine Zerlegung von R in axb Rechtecke gibt.
b) Man bestimme das flächenmäßig größte axb Rechteck, sodaß es mindestens zwei verschiedene Zerlegungen von R in axb Rechtecke gibt.
(Zwei nicht identische Zerlegungen werden als verschieden gezählt.)

9) Seien $a_1,\dots,a_n$ ganze Zahlen, sodaß jede Teilsumme
$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} (1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n)$ von Null verschieden ist.

Man zeige: Man kann die Menge der positiven ganzen Zahlen so in endlich viele Teilmengen zerlegen, daß aus $x_1,\dots,x_n$ in derselben Teilmenge $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \neq 0$ folgt.

Lösung des Beispiels 3 aus dem ÖPMW

Man zeige, daß das Gleichungssystem
$x+y^2+z^4=0$
$y+z^2+x^4=0$
$z+x^2+y^4=0$
in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ genau zwei Lösungen hat.

Da Quadrate und Biquadrate reeller Zahlen nicht negativ sind, müssen $x,y,z \le 0$ sein.
Setzen wir $u=-x$, $v=-y$ und $w=-z$, so erhalten wir für die nicht negativen Zahlen u,v,w das Gleichungssystem: $u=v^2+w^4$, $v=w^2+u^4$, $w=u^2+v^4$.
Da das System zyklisch ist, kann man oBdA $u \le v \le w$ oder $u \le w \le v$ annehmen.
Aus $u \le v \le w$ folgt $u^2 \le v^2$ und $v^4 \le w^4$, also $w \le u$ und somit $u=v=w$.
Aus $u \le w \le v$ folgt $w^2 \le v^2$ und $u^4 \le w^4$, also $v \le u$ und somit $u=v=w$.
Für $u=v=w=a$ kollabiert das System zu $a=a^2+a^4$, mit $a=0$ oder $a^3+a-1=0$.
Diese kubische Gleichung hat nach der Descartesschen Zeichenregel genau eine positive Lösung (näherungsweise $a \approx 0{,}682327803828\dots$).
Das gegebene Gleichungssystem hat also wie behauptet genau zwei Lösungen.
Bemerkung: Die Elimination von zwei Unbekannten ist zwar möglich, doch führt sie auf eine Gleichung vom Grad 64, nämlich
$t^{64}-8t^{57}+12t^{50}+40t^{43}-26t^{36}-248t^{29}-372t^{22}+984t^{15}+1793t^{8}-128t$.
Für jedes Lösungstripel (u,v,w) müssen u,v und w Lösungen dieser Gleichung sein.

Aufgaben der XXXI. IMO 11. und 12. Juli 1990 in Peking

1) Gegeben sei ein Kreis mit den Sehnen AB und CD, die sich in einem inneren Punkt E schneiden. Sei M ein innerer Punkt auf der Strecke EB und k der Kreis durch die Punkte D,E und M. Die Tangente an k im Punkt E schneide die Geraden BC bzw. AC in F bzw. G. Wir bezeichnen AM/AB mit t. Man bestimme EG/EF in Abhängigkeit von t .

2) Sei $n \geq 3$. Bezeichne E eine Menge aus $2n-1$ verschiedenen Punkten auf einer Kreislinie. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt „gut", falls es Elemente $x,y \in M$ gibt, sodaß im Inneren von einem der beiden Kreisbögen zwischen x und y genau n Punkte von E liegen. Man bestimme die kleinste Zahl k, sodaß jede Teilmenge M von E mit k Elementen gut ist.

3) Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n>1$, für die $(2^n+1)/n^2$ eine ganze Zahl ist.

4) Es sei $\mathbb{Q}^+$ die Menge aller positiven rationalen Zahlen.
Man gebe eine Funktion $f:\mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Q}^+$ an, sodaß für alle $x,y \in \mathbb{Q}^+$ die Gleichung $f(xf(y))=f(x)/y$ gilt.

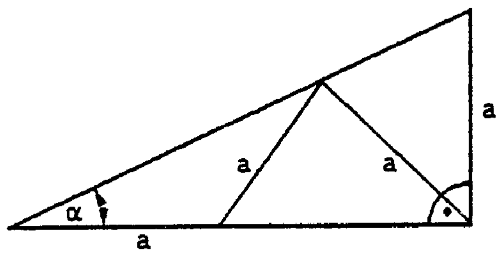
5) Zu Beginn ist eine ganze Zahl $n_0>1$ gegeben. Zwei Spieler A und B wählen abwechselnd ganze Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ nach den folgenden Regeln:
Nach der k-ten Runde kennt A die Zahl n_{2k} und wählt n_{2k+1} derart, daß $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$ ist, $k=0,1,\ldots$.
Kennt nun B die Zahl n_{2k+1}, dann wählt er die ganze Zahl n_{2k+2} derart, daß $n_{2k+1}/n_{2k+2}=p^m$, wobei p eine Primzahl (positiv) und $m \geq 1$ eine natürliche Zahl ist.
Der Spieler A gewinnt das Spiel, sobald er die Zahl 1990, B gewinnt, sobald er die Zahl 1 wählt. Für welche n_0 kann
a) A einen Gewinn erzwingen
b) B einen Gewinn erzwingen und
c) keiner der beiden Spieler einen Gewinn erzwingen?

6) Beweise, daß ein konvexes n-Eck mit $n=1990$ und den folgenden Eigenschaft existiert:
i) Alle Winkel des n-Ecks sind gleich.
ii) Die 1990 Seitenlängen sind alle verschieden und sind bis auf die Reihenfolge die Zahlen $1^2, 2^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$.

1. Mathematik- und Denksportwettbewerb für Schüler der 4. Klassen der AHS in Wien (Miniolympiade)

1) Herr Kluge gibt seine Versicherungsnummer folgendermaßen an:
Sie ist 5-stellig, enthält 4 ungerade Ziffern und die Null. Jede Ziffer ist größer als die Ziffer, die rechts neben ihr steht. Die Summe aller Ziffern beträgt 24.
Antwort: Die Versicherungsnummer lautet ....

2) Überlege wie groß der Winkel α ist.
(Die vier mit a bezeichneten Strecken sind gleich lang.)



Antwort: α = ...

3) Jutta hatte bei 18 Schularbeiten in der 3. Klasse eine Durchschnittsnote von ca. 1,28. Ihre schlechteste Note war 5. Wie oft hatte sie die Note 1?
Antwort: Sie hatte .... - mal die Note 1.

4) Die Seitenlängen eines Rechtecks verhalten sich wie 3:4. Das gleiche Verhältnis gilt für ein zweites Rechteck, dessen Umfang um 20% größer als der des ersten ist.
Um wieviel % ist die Fläche des zweiten Rechtecks größer als die des ersten?
Antwort: Die Fläche des zweiten Rechtecks ist um .... % größer.

5) Eine Maschine sortiert Lose nach ihrer Glückszahl.
Im ersten Arbeitsgang werden die Lose, deren Glückszahl durch 3 teilbar ist, von den übrigen getrennt.
Im zweiten Arbeitsgang wird jeder der beiden Stöße so weiter geteilt, daß jene Lose, deren Glückszahl durch 5 teilbar ist, von den anderen getrennt werden.
Im dritten Arbeitsgang werden die bisher entstandenen Stöße nach ihrer Teilbarkeit durch 9 weiter aufgeteilt.
Wieviele Stöße können dabei höchstens entstehen?
Antwort: Es entstehen dabei höchstens .... Stöße.

6) Das Netz eines Quaders mit den Kantenlängen a=4 cm, b=5 cm und c=6 cm soll so gezeichnet werden, daß sein Umfang möglichst klein wird.
Antwort: Der kleinstmögliche Umfang des Netzes beträgt .... cm.

7) Bei einer dreistelligen Zahl, deren Zehnerziffer 0 ist, wird die erste und letzte Ziffer vertauscht. Dabei entsteht eine um 792 kleinere Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl.
Antwort: Die ursprüngliche Zahl ist ....

8) In einer Klasse mit 32 Kindern spielen 12 Kinder ein Instrument. 9 davon sind Buben. 40% der Mädchen spielen kein Instrument. Wieviele Mädchen sind in der Klasse?
Antwort: Es sind .... Mädchen in der Klasse.

9) Die beiden kürzeren Seiten eines stumpfwinkeligen Dreiecks sind 19 cm bzw. 91 cm lang.
Auch die längste Seite hat eine ganzzahlige Länge. Wie lang muß diese längste Seite mindestens sein.
Antwort: Die längste Seite muß mindestens ...... cm lang sein.

10) In einer Trommel befinden sich 1991 Kugeln, die mit den Zahlen 1 bis 1991 durchnumeriert sind.
Eine Zufallsmaschine zieht (ähnlich wie beim Lotto) der Reihe nach Kugeln, und zwar so lang, bis die erste Kugel gezogen wird, deren Zahl durch 19 oder durch 91 teilbar ist.
Möglicherweise kann die Maschine ihre Arbeit schon nach dem ersten Zug beenden. Es könnte aber auch lange dauern.
Nach wievielen Zügen beendet die Maschine spätestens ihre Arbeit?
Antwort: Die Maschine beendet die Arbeit spätestens nach ..... Zügen.

Literatur

[B-G] G. BARON - P. GRUBER Österreichische Mathematische Olympiaden Wettbewerbsaufgaben und Lösungen. BMfUuK 1976

[BW1] G. BARON - E. WINDISCHBACHER Österreichische Mathematische Olympiaden Wettbewerbsaufgaben und Lösungen. Anfänger - Fortgeschrittene Kurs-, Landes-, Gebietswettbewerb 1976-1985. BMfUuK 1986

[BW2] G. BARON - E. WINDISCHBACHER Österreichische Mathematische Olympiaden Wettbewerbsaufgaben und Lösungen. Bundeswettbewerb 1976-1985. BMfUuK 1986

[BW3] G. BARON - E. WINDISCHBACHER Österreichische Mathematik Olympiaden. 1970-1989. Aufgaben und Lösungen. Univ. Verlag Wagner Innsbruck. 1990.

[AE1] A. ENGEL Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR. Ernst Klett,1966.

[AE2] A. ENGEL Das Training unserer IMO-Mannschaft. Zentralblatt der Didaktik der Mathematik 1988 S.186-192

[AE3] A. ENGEL Bericht über die XXXI. Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) Zentralblatt der Didaktik der Mathematik 1990 S.222-223.

[HOR] H.-D. HORNSCHUH Internationale Mathematk-Olympiaden I-III. Manz München,1977,1977.1983.

[MA1-4] H.C.E. MARTUS Mathematische Aufgaben I-IV Ferdinand Dümmlers Verlagsbuchhandlung Berlin (1. Auflage von Teil I 1864.)

[MAC] Mathematics Competitions. Journal of the World Federation of National Mathematics Competitions, Australia.

[ORE] O. ORE CARDANO the gambling scholar. With a translation from the Latin of Cardano's Book on Games of Chance, by S. H. Gould. Dover Publ., Inc. New York 1965.

[PLA] Plakataktion des BMfUKS unter Frau Bundesminister HAVLICEK, 1989.

[GPS] Georg POLYA Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Sammlung Dalp. Francke Verlag Bern, 1949.

[GP1-2] Georg POLYA Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band 1 und 2. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1966 und 1967.

[STE] Günter STEINBERG Was besagt „Grund" in mathematischen Grundkursen? Math. nat. wiss. Unterricht 43/3 (1990) S. 155-160